Eloi Teixeira César
Thales Costa Soares
Reginaldo Fernando Carneiro
Marco Antonio Escher
Bárbara Bastos de Lima Duque
(Organizadores)

Ciência em dia:

Jornadas de divulgação científica

A Matemática está em tudo

LF EDITORIAL
2018

1ª Edição

Direção editorial: José Roberto Marinho

Revisão:
Capa: Fabrício Ribeiro
Projeto gráfico e diagramação: Fabrício Ribeiro

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Ciência em dia: jornadas de divulgação científica: a matemática está em tudo / Eloi Teixeira César (Organizador). – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2018.

Vários autores.
ISBN 978-85-7861-532-1

1. Ciências - Divulgação 2. Matemática 3. Matemática - Estudo e ensino 4. Professores - Formação I. César, Eloi Teixeira.

18-13503 CDD-500.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Educação matemática 510.7

LF EDITORIAL

Editora Livraria da Física
www.livrariadafisica.com.br

Matemáticas da Música[1]

Luiz Castelões[2]

Introdução

Apesar do generalizado desprestígio da Música como atividade profissional e acadêmica no seio da sociedade brasileira, a Música tem uma origem nobilíssima do ponto de vista das ciências exatas, entre elas a Matemática, na história ocidental.

O monocórdio de Pitágoras, um dispositivo sonoro, foi não apenas um experimento musical e matemático mas é também considerado como o primeiro dispositivo científico desenvolvido no Ocidente. Isto abriu caminho para uma longa e vívida história de colaborações entre Música e Matemática, que chega, com vigor, até os dias de hoje.

No espaço restrito, ainda que precioso, deste capítulo, então, me dedicarei a:

1. Refletir sucintamente sobre as relações entre Matemática (Ciência) e Música, a partir de alguns poucos *flashes* históricos selecionados para esta ocasião;

2. Demonstrar como a Teoria Musical que aqui vou chamar de "tradicional" (a grosso modo, a mais utilizada entre os séc. XVII e XIX, o chamado "período da prática comum", mas ainda utilizada hoje em dia para as músicas derivadas deste) faz uso bastante idiossincrático e distorcido da Aritmética (justificável do ponto de vista da música em questão, mas *nonsense* do ponto de vista matemático);

---

1 Este ensaio é a versão escrita da palestra que realizei no Centro de Ciências da UFJF, em 26 de Outubro de 2017, a convite de Bárbara Duque. Deixo registrado meu mais sincero agradecimento por esta vibrante oportunidade.

2 Instituto de Artes e Design, Universidade Federal de Juiz de Fora.

3. Exemplificar o papel pujante da Matemática no âmbito específico da Composição Musical atual, sobretudo em pesquisas desenvolvidas pelo COMUS – Grupo de pesquisa em composição musical da UFJF desde 2010.

Este capítulo tem um caráter sobretudo de divulgação acadêmica, buscando uma leveza e quase informalidade de escrita, na meta talvez utópica de fazer a Música inteligível ao não-músico e destinando-se muito mais aos colegas de outras áreas e aos estudantes dos anos iniciais das graduações em Música do que aos especialistas pós-graduados, acostumados que estão a literaturas mais densas e consolidadas em Música e Matemática.

1. Relação Matemática e Música: histórico gerando reflexões

A Antiguidade Clássica e a Idade Média nos fornecem exemplos inequívocos de relação visceral entre Música (Ciência) e Matemática.

Na Antiguidade Clássica, a Música vista como 4º ramo da Matemática, integrada à Matemática e à Astronomia através do conceito de "Harmonia das esferas" (em resumo, a crença na equivalência da proporção entre números inteiros pequenos, a distância entre os planetas e a afinação de escalas musicais) e a Harmonia (musical) sendo estudada por Pitágoras (580-500AC) e pelos pitagóricos como parte da Física são apenas alguns exemplos. E, na Idade Média, a Música como parte do *Quadrivium*, junto com Aritmética, Geometria e Astronomia, demonstra a continuação desta aliança para muito além da Grécia Antiga.[3]

Apesar deste rico histórico de parceria entre o que vemos hoje como áreas distintas, é preciso frisar, justamente do ponto de vista confortável da época na qual falamos (isto é, 2017), que Música não é igual à Matemática.

Digo isto no quadro necessário de se tentar escapar de duas visões igualmente equivocadas do senso-comum a respeito de Música: 1) a ideia supracitada de que Música é igual à Matemática (e, portanto, apenas e necessariamente "racional"), e 2) a ideia oposta, ou seja, de que Música é um território apenas *expressivo* e *espontâneo* (e, segundo esse ponto de vista, da esfera do

---

3 Para uma leitura em língua portuguesa mais extensa acerca destes exemplos, recomendo o livro de Abdounur (1999).

"irracional" e necessariamente desvinculada de qualquer aspecto matemático, racional, científico, planejado).

Mas... nem tanto ao céu, nem tanto ao mar! Provavelmente, estaremos mais próximos de uma verdade musical ao optarmos por um caminho do meio: Música não é nem só uma "ciência", "racional", nem apenas "expressão", "irracional".

O fato de a Música abranger tanto aspectos "racionais" e "objetivos" quanto não (ou seja: sensação, intuição, sentimento, vontade, percepção, gosto, expressão) nos permite, então, afirmar com uma certa margem de segurança que ela não é igual à Matemática. Embora nunca seja forçoso salientar que isto não equivale a defender que haja uma relação de oposição entre ambas as áreas, já que existem interseções possíveis entre lógicas musicais e matemáticas – um tópico bastante mais especializado que foge ao escopo deste capítulo, mas que pode ser examinado entre as referências listadas ao seu final.

O reconhecimento de uma não-identificação total entre Música e Matemática nos remete à relação, mais ampla, entre Música e Ciência, novamente desde o confortável ponto de vista da atualidade (digo "confortável" porque tendo à disposição milênios de história passada, registrada por escrito).

Música e Ciência utilizam de altas doses de criatividade em seus processos e nisto são parecidas. Basta imaginar o quanto de criatividade foi necessária a um Newton e a um Einstein, mas também a um J. S. Bach e a uma Elis Regina. Porém, "Ciência" pressupõe métodos racionais (coerência de argumento, modelos, critérios, protocolos) aplicados a uma realidade supostamente objetiva; enquanto que à Música pode interessar tanto uma tal "realidade" (ex.: modelos físicos aplicados a sons do ambiente, modelos matemáticos aplicados a estruturas e procedimentos sonoros/musicais) quanto ficções (sons imaginários, inventados), via processos racionais ou não.

Neste ponto, recomendamos uma consulta ao próprio desenvolvimento da escrita musical ocidental, a grosso modo ao longo de todo o milênio passado e até o presente, uma história rica em exemplos de, por um lado, controle progressivamente maior e mais racional da matéria sonora (em criadores como Machaut, Gesualdo, J. S. Bach, Beethoven, Debussy, Webern, Lachenmann, Ferneyhough e Carola Bauckholt), e por outro lado, de indeterminação (em criadores como John Cage, Cornelius Cardew e nas partituras de *songbooks* do repertório popular).

Talvez resida neste duplo interesse da Música, em relação ao que é científico e ao que não é, ao racional e irracional, sistemático e espontâneo, determinado e indeterminado, justamente a grande dificuldade em se realizar nela, em ser um "bom músico": a Música trabalha simultaneamente com diversas competências, diversas esferas, antagônicas entre si até. Isto explica, em parte, o relato usual de frustração do senso-comum em relação ao aprendizado e desenvolvimento musicais: "eu queria ser músico", "eu desisti da música" etc.

Digo apenas "em parte" (e aqui me permito uma breve digressão) porque a outra parte se refere à falência da educação musical em nossa sociedade, resultante de fatores como o preço alto da educação musical de qualidade face à desigualdade estrutural que nos caracteriza, a autossabotagem de educadores musicais que veem a Licenciatura em Música como um curso de menor exigência musical, como uma mera válvula de escape, tanto para aquele que não deseja a Música como uma profissão de exigência equivalente à das profissões de maior status na sociedade, quanto para uma burocracia que se pauta mais pelo quantitativo do que pelo qualitativo (e, consequentemente, formando professores de música que não são músicos plenos), além do próprio sucateamento estrutural e generalizado que frequentemente caracteriza a falta de um projeto educacional mais altivo e ambicioso.

Finalmente, no que se refere à relação entre Matemática e Música no ambiente acadêmico (europeu, norte-americano e brasileiro) dos últimos dois séculos, vale sublinhar o fato de que a Matemática (e, mais amplamente falando, a Ciência) foi utilizada para legitimar a inserção e presença da Música na Universidade, num esquema de poder em que as ciências exatas aparecem não como parceiras mas em relação de superioridade hierárquica em relação à Música, num contexto bastante diverso daquele da Antiguidade Clássica (para mais informações, ver por ex. Kerman 1987, além das extensas bibliografias sobre o exemplo de Hanslick no séc. XIX e sobre formas de legitimação em Música, citadas em Castelões 2009 e 2016a).

2. As estranhas matemáticas da Teoria Musical "tradicional"

Conforme citado na Introdução deste capítulo, a Teoria Musical aqui apelidada de "tradicional" foi pródiga em fazer uso idiossincrático (distorcido) da matemática. No que segue, a título ilustrativo, me dedico a listar alguns exemplos da matemática dos intervalos, das fórmulas de compasso, das indicações metronômicas – todos, espero, bem acessíveis ao leitor leigo, não-músico –, além de um tópico um pouco mais complicado, sobre as incongruências entre a aplicação da Teoria dos Conjuntos à Música e os sons como fenômenos físico-acústicos.

2.1. A matemática dos intervalos

Em Música, "intervalo" significa a distância entre duas notas. Cada uma dessas "distâncias", ou seja cada intervalo, pode ser medida em Música (e em Física acústica) e recebeu na Teoria Musical ocidental "tradicional" um nome diferente.

Mais especificamente, o "uníssono" (atenção: "uni-" = 1) representa a identificação da nota com ela mesma (distância/intervalo = 0). Há aqui, já, uma identificação entre os valores 1 e 0. À menor distância/intervalo depois do uníssono (dentro do quadro do sistema temperado igual, que é o quadro preponderante a partir do séc. XVIII e de mais fácil explicação para o leigo), atribuiu-se o número 2 ("segunda [menor]"). É desta identificação entre 1 e 0 (no caso do uníssono) e do menor valor como sendo 2 (segunda) é que nascem as demais distorções da matemática de intervalos (ver Fig. 1).

Distorções como as exemplificadas na Fig. 1 foram corrigidas conforme se adotou um sistema simplificado de contagem semitonal dos intervalos (ou seja, o menor intervalo sendo considerado como 1 e todos os demais intervalos sendo contados como somas a este), algo que só fez sentido musical a partir de meados do séc. XVIII, com a adoção de um sistema temperado igual (ou quase) de afinação, seguido de um gradualmente crescente cromatismo ("semitonalismo") das próprias estéticas musicais em direção ao final do séc. XIX início do XX, e culminando com a aplicação da Teoria dos Conjuntos à Música (exemplificada na última linha da Fig. 1) na segunda metade do séc. XX (por Allen Forte), que resultou numa maior racionalidade na contagem de intervalos (embora tampouco sem incongruências, como veremos no item 2.4).

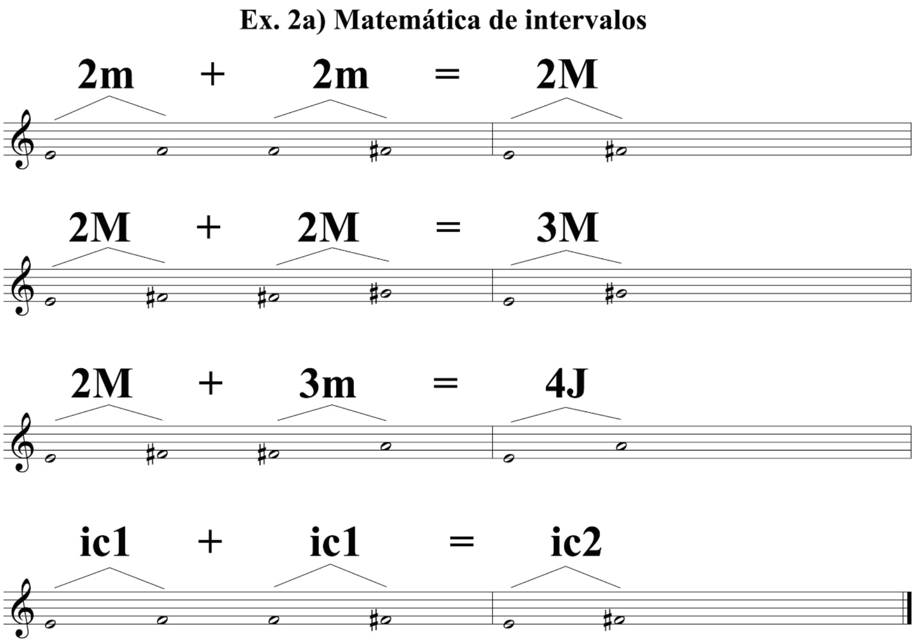

Figura 1: Matemática dos intervalos na análise musical tradicional (3 primeiras linhas) e na Teoria dos Conjuntos conforme aplicada à Música (última linha): embora encontre justificativa na música praticada na época, as somas dos números que designam os intervalos não fazem sentido do ponto de vista matemático nos 3 exemplos superiores (2+2=2, 2+2=3 e 2+3=4) e tal abordagem de contagem de intervalos é substituída no séc. XX pelo modelo da última linha, onde por ex. 1+1=2.

2.2. A matemática das fórmulas de compasso

Em Música, "fórmulas de compasso" designam agrupamentos de pulsos, ou batidas, formando um padrão frequentemente cíclico (ex.: quando você conta de 1 a 4 junto com o ritmo de uma música). Fórmulas de compasso são representadas em escrita musical tradicional ocidental com signos similares a frações (4/4, 3/4, 2/4, 6/8, 9/8, 3/16, 3/4+3/16 etc.). O problema, matematicamente falando, é que tais fórmulas não significam o mesmo que frações e as operações com frações não funcionam com estas fórmulas. Por exemplo, em Música, 3/4 ≠ 6/8 ≠ 12/16, embora sejam equivalentes do ponto de vista matemático (ver Fig. 2).

Ex. 2b) Matemática das fórmulas de compasso

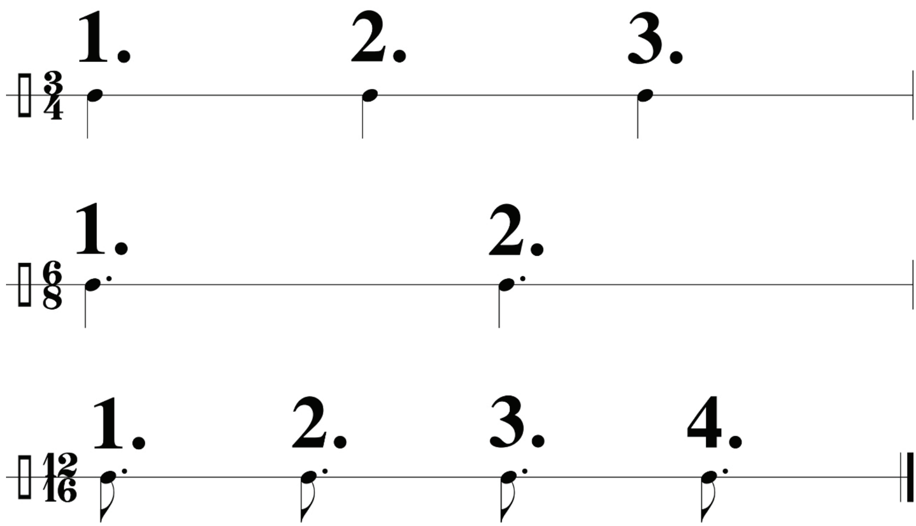

Figura 2: Matemática das fórmulas de compasso, na escrita musical ocidental tradicional (obs.: os números de 1 a 4 sobre as pautas indicam as batidas de cada fórmula de compasso): embora encontre plena justificativa musical, já que 3/4 é um compasso ternário simples, 6/8 é um compasso binário composto e 12/16 é um compasso quaternário composto (e, portanto, todos musicalmente diferentes), a representação de fórmulas de compasso via signos similares a frações não faz sentido do ponto de vista matemático, já que, em Música, por ex., 3/4 ≠ 6/8 ≠ 12/16 e 3/4 + 3/4 não é exatamente igual a 6/4 (ou a 3/2).

2.3. A matemática das indicações metronômicas

Em Música (desde Beethoven), indica-se o andamento, ou seja a velocidade com que se toca uma música, informando quantas vezes um determinado valor rítmico ocorre por minuto. A duração temporal do valor rítmico grafado é, portanto, inversamente proporcional ao número escrito. Entretanto, a teoria musical tradicional foi imprudente ao grafar isto de modo simplista (ou matematicamente equivocado).

Deste modo (2 exemplos):

- ♩ = 60 (lê-se: “semínima é igual a 60”); e
- ♩ = 240 (lê-se: “semínima é igual a 240”)

Em vez de assim (como seria matematicamente correto):

- ♩ = 1/60 (que seria lido como: “semínima é igual a 1 minuto / 60”); e

- ♩ = 1/240 (que seria lido como: “semínima é igual a 1 minuto / 240”)

Como resultado, as operações musicais-matemáticas com andamentos se tornam menos claras e menos intuitivas. A justificativa (musical) para o que, matematicamente falando, seria visto como um deslize, é que o que o músico que se utiliza dessa grafia quer dizer é que “a indicação metronômica é igual a...”, ou seja, que o metrônomo deve ser posto naquele valor, e não que o referido valor rítmico corresponde àquele número. Em todo caso, a grafia empregada dificulta o correto entendimento matemático (e subsequentes operações) do andamento.

2.4. Das incongruências entre aplicação da Teoria dos Conjuntos à Música e os sons como fenômenos físicos

Em meados do séc. XX, a aplicação da Teoria dos conjuntos à analise musical (inicialmente por Allen Forte) teve como um de seus resultados tornar a matemática de intervalos mais coerente, ao consolidar a atribuição do valor zero ao uníssono e do valor 1 ao menor intervalo/distância entre notas no sistema temperado igual (o semitom). A aritmética passou a funcionar com estes intervalos de forma mais coerente (isto é, matematicamente funcional) a partir de então. E isto é um mérito inegável.

Entretanto, números inteiros contíguos abaixo ou acima de 15-16 (ex.: 1 e 2, 2 e 3, 3 e 4... 16 e 17 etc.) NÃO equivalem às proporções físico-acústicas do intervalo de semitom (assim representado), gerando um novo problema musical-matemático-físico – ou, metaforicamente falando, uma espécie de briga entre a Matemática e a Física acústica no ringue da Teoria Musical.

Movimentos musicais como o “Espectralismo” (a partir dos anos 1970) resolveram tal problema, ao menos para fins de composição musical, abandonando nomes de notas e ambas as numerações de intervalos tradicional e via Teoria dos conjuntos em favor do uso de valores de alturas (notas) em Hertz (por ex., “440Hz” em vez de “A4”) e do uso de proporções entre alturas (intervalos) equivalentes às encontradas no som como fenômeno físico-acústico (ex., “2:1” em vez de “oitava”). Os sistemas propostos anteriormente (da análise musical tradicional e da Teoria dos Conjuntos conforme aplicada à Música), entretanto, seguem coexistindo com esse tipo de solução mais atual, muito em função do fato de que as músicas analisadas por esses métodos também seguem coexistindo. Ou seja: métodos de teoria/análise diversos refletem um panorama musical também diverso.

Ex. 2d) Intervalos: Matemática (Teoria dos conjuntos) vs Física acústica

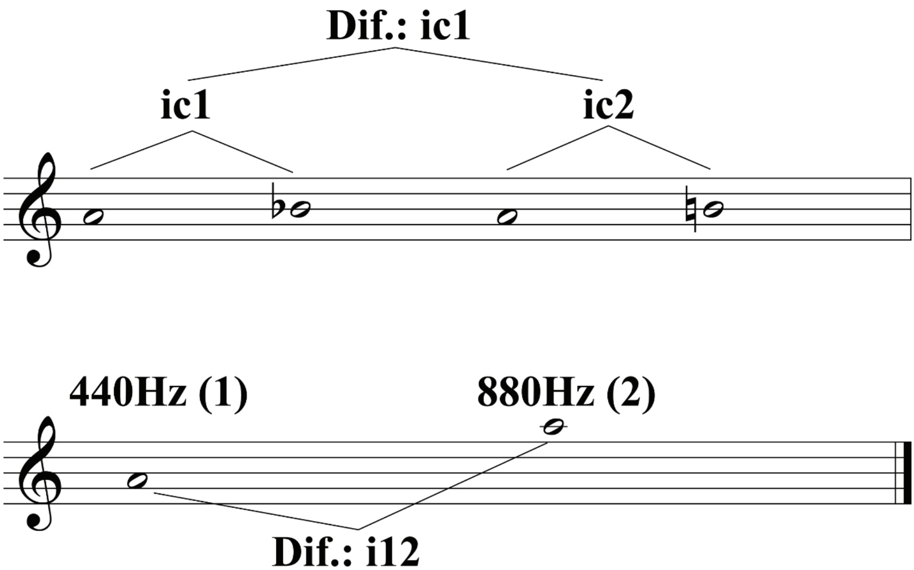

Fig. 3 – Sobre a diferença entre proporções na Teoria dos conjuntos aplicada à Música (linha superior) e na Física acústica (linha inferior): a diferença entre 1 e 2 na primeira equivale a um semitom (ic1), enquanto que na segunda equivale a uma oitava (i12).

3. Alguns papéis da Matemática no auxílio à Composição Musical atual

Voltando-nos para um momento mais atual, à guisa de Conclusão apenas provisória, e olhando a relação entre Música e Matemática de forma mais ampla e sob o prisma da engenharia da Composição Musical, verificamos que a Matemática desempenha um papel fundamental na criação musical a partir de dados de outras disciplinas: ela funciona como o intermediário entre qualquer disciplina que se expresse em números (e fórmulas matemáticas) e a Música. Trata-se, portanto, de uma poderosa ferramenta de Música e interdisciplinaridade, ainda mais fortalecida e acelerada pelo advento e uso de novas tecnologias (digitais), através das quais cálculos extensos e/ou repetitivos, que outrora precisavam ser feitos à mão, passam a ser feitos de maneira automática, ou quase, pela máquina, a partir de sua programação pelo músico e/ou por seus colaboradores de outras áreas (Computação, Engenharia, Física). A importância da Matemática para a Música, portanto, ultrapassa em muito os limites das formulações da própria Matemática: ela funciona como um porta-voz entre a Música e os mundos quantitativos.

Entre as pesquisas de maior impacto conduzidas pelo COMUS – Grupo de pesquisa em composição musical da UFJF (www.ufjf.br/comus) com auxílio da Matemática, desde 2010, estão a conversão de contornos de imagens 2D e 3D e de cores via sistemas RGB, HSV e CMYK com fins criativos (composicionais).

Tais pesquisas foram desenvolvidas através de auxílio financeiro do CNPq (2010-12) e de bolsas de IC que permitiram a constituição de equipes interdisciplinares, com bolsistas dos cursos de Música, Artes, Matemática e Computação da UFJF, e estão fartamente documentadas através de artigos e capítulos publicados de 2010 a 2016 em português, espanhol e inglês, no Brasil, Argentina, México e França – além de terem resultado em vultosa produção artística (obras musicais e audiovisuais originais dos pesquisadores e colaboradores do grupo).

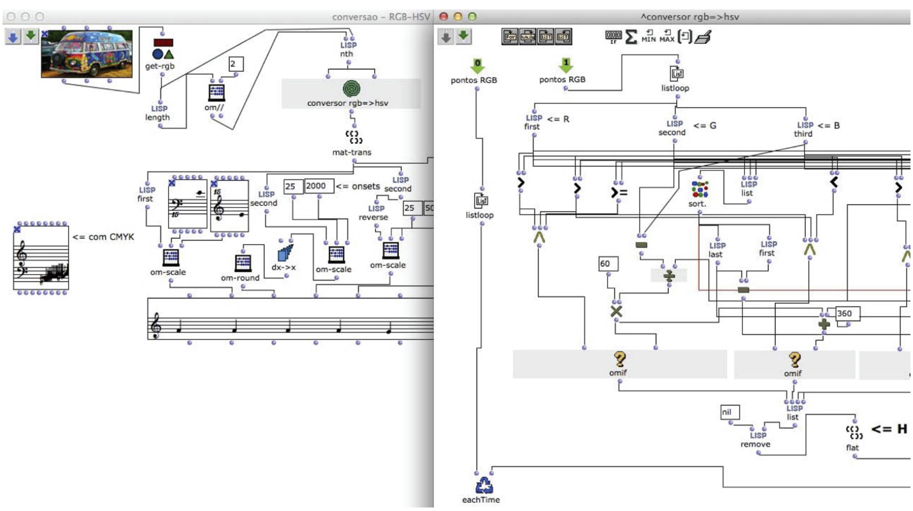

Fig. 4 – Conversor entre sistemas de cores RGB e HSV para fins criativos (composicionais) desenvolvido pelo COMUS – Grupo de pesquisa em composição musical da UFJF: visão geral da implementação do algoritmo via plataforma OpenMusic (para mais informações, ver Castelões et al. 2015 e Castelões 2016b).

Referências bibliográficas

ABDOUNUR, Oscar João. 1999. **Matemática e Música: pensamento analógico na construção de significados**. São Paulo: Escrituras Editora.

CASTELÕES, Luiz E. 2016a. **Formas de legitimação em música**. ouvirOUver, UFU, Uberlândia, v. 12, n. 2, pg. 494-504.

_______________. 2016b. **Musicalising Sonification**. *OM Composer's Book, Vol. 3*, por Jean Bresson [ed.]. Paris: Editions Delatour.

_______________. 2009. **A Catalogue of Musical Onomatopoeia**. IRASM - International Review of the Aesthetics and Sociology of Music, Vol. 40, No. 2: 299-347. Zagreb: Croatian Musicological Society (CMS).

CASTELÕES, Luiz E.; OLIVEIRA, Talita De; FRANCO, Yago. 2015. **Conversores de parámetros del color a parámetros sonoros cuantificables usando los sistemas RGB, HSV y CMYK**. Sonic Ideas, 7(14).

KERMAN, Joseph. 1987. **Musicologia**. 1a ed. São Paulo: Martins Fontes.